DP 选讲 1（区间、树上、环形）

by RenaMoe

重识 DP

抽象地讲，对于需要 DP 的问题，有若干状态形成的集合，每个状态有若干特征值，状态之间存在转移关系。通过推导所需要的状态的特征值得到答案。

特征值可以是描述状态的量，可以是最优值，可以是方案数。

举例：数字三角形中，一个状态的特征值有位置 (i, j) 和路径数字和的最大值。

把 (i, j) 作为 key，把路径数字和的最大值作为 value。

关于 DP 状态的设计和优化的 tips：

- 状态可以合并（某一特征值相同的合并为一个状态，其他特征值相加、取最值等）
- 特征值很多（拆分、挖掘隐藏信息、取舍）
- key 和 value 不是固定的（常见：$f_{\text{key}} = \text{value}$，同样可以设计为 g_{value} 包含 key）

关于 DP 转移的 tips：

- 划分子问题（搞不清就先尝试写记忆化搜索）
- 初始、边界状态特殊考虑
- 数据结构等手段优化

区间 DP

对序列区间的特征值进行 dp，往往是高维 dp，数据范围不大。

要求子区间的特征值易于合并。

经典题：石子合并

有 n 个数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，进行 $n-1$ 次合并操作，每次操作将相邻的两堆合并成一堆，能获得新的一堆中的石子数量的和的得分。你需要最大化你的得分。

$n \leq 300$。

示例代码：

```
for (int len = 1; len <= n; ++len) {
    for (int l = 1; l + len - 1 <= n; ++l) {
        int r = l + len - 1;
        for (int k = l; k < r; ++k) {
            f[l][r] = max(f[l][r], f[l][k] + f[k + 1][r] + sum(l, r));
        }
    }
}
```

如果是 n 个数的环（首尾相连），还是 $n \leq 300$，怎么做?

Luogu P1220 关路灯

link

一条路线上安装了 n 盏路灯，每盏灯的功率有大有小，老张就住在第 c 盏灯处，他每天早上天亮时一盏一盏地关掉这些路灯。

他从自己所处位置开始，然后可以向左也可以向右按一定速度移动去关灯（关的过程中适当地调头有可能会更省一些）。为老张编一程序来安排关灯的顺序，使从老张开始关灯时刻算起所有灯消耗电最少。

老张关灯所用的时间忽略不计。灯关掉后便不再消耗电了。

$1 \leq n \leq 50$。

Luogu P4342 [IOI1998] Polygon

link

n 个点的环，每个点有数字，每个边有符号 $+$ 或 $\times$。

一系列操作为：首先断掉一条边变成链，此后每次选择一条边，将两点合并为一个点，新数字为表达式计算的得数。直到全合并为一个点。

求最大得数以及对应断掉的边有哪些。

$n \leq 50$，任何操作中的数字 $\in [-32768, 32767]$。

Luogu P3592 [POI2015] MYJ

link

有 n 家洗车店从左往右排成一排，每家店都有一个正整数价格 p_i。有 m 个人要来消费，第 i 个人会驶过第 a_i 个开始一直到第 b_i 个洗车店，且会选择这些店中最便宜的一个进行一次消费。但是如果这个最便宜的价格大于 c_i，那么这个人就不洗车了。请给每家店指定一个价格，使得所有人花的钱的总和最大。

$1 \leq n \leq 50$，$1 \leq m \leq 4000$，$1 \leq c_i \leq 5 \times 10^5$。

树形 DP

基础必备知识：

- 维护子树大小、权值和
- 求树的重心
- 求树的直径

Luogu P1352 没有上司的舞会

link

树上最大独立集

n 个点的树，每个点有权值。选择一些点，要求集合内任意两点不相邻，求最大权值和。

要求时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

Luogu P2014 [CTSC1997] 选课

link

树上背包

n 个点的树，每个点有权值，选一个点必须同时选择其父亲。求选 m 个点的最大权值和。

$n \leq 300$。

Luogu P2016 战略游戏

link

树上最小点覆盖

n 个点的树，选一些点为特殊点，每个特殊点覆盖所有和它相连的边。求最少需要选择的特殊点个数才能覆盖所有边。

要求时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

Luogu P2279 [HNOI2003] 消防局的设立

link

n 个点的树，选一些点为特殊点，每个特殊点覆盖所有和它距离不超过 2 的点。求最少需要选择的特殊点个数才能覆盖所有点。

要求时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

CF1101D. GCD Counting

link

n 个点的树，每个点有权值 a_i。找到一条最长链，使得链上所有点权值的 $\gcd$ 不为 1。求最长长度。

$1 \leq n \leq 2 \times 10^5$，$1 \leq a_i \leq 2 \times 10^5$。

Tips：数论常识

$n \leq$	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$\max\{\omega(n)\}$	2	3	4	5	6	7	8	8	9
$\max\{d(n)\}$	4	12	32	64	128	240	448	768	1344
$n \leq$	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}	10^{16}	10^{17}	10^{18}
$\max\{\omega(n)\}$	10	10	11	12	12	13	13	14	15
$\max\{d(n)\}$	2304	4032	6720	10752	17280	26880	41472	64512	103680

换根 DP

一个 n 个点的树，找出一个点，使得以这个点为根时，所有点的深度之和最大。

要求 $\mathcal{O}(n)$。

CF1092F. Tree with Maximum Cost

link

换根 DP

有一棵 n 个节点的树，每个点有一个权值 a_i。定义 $\operatorname{dist}(u,v)$ 为 u,v 两点间距离。找到一个点 u，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{dist}(i,u) \cdot a_i$$

最大。您只需求出最大值。

$1 \leq n, a_i \leq 2 \times 10^5$。

DAG 上 DP

拓扑排序。

Luogu P7077 [CSP-S2020] 函数调用

link

有一个长度为 n 的序列，m 个操作，操作有如下三种：

- 单点加
- 全局乘
- 以一定顺序调用 C_i 个其他操作，保证不直接或间接调用自身

Q 次调用。

$n, m, Q \leq 10^5$，$\sum_i C_i \leq 10^6$。

环形、基环树 DP

处理环的后效性问题。

Luogu P2607 [ZJOI2008] 骑士

link

n 个点和 n 条单向边构成的图，每个点有权值。选择一些点使得集合内任意两点间无边，求最大权值和。

$1 \leq n \leq 10^6$。