DP 选讲 2（状压、计数、优化）

by RenaMoe

取模

计数题往往因为方案数很多，让答案对某个大数 P 进行取模。

P 往往是大质数，常见的有 998244353 和 10^9+7。

模意义下加、减、乘正常做，

除法注意：$\frac{a}{b}$ 改为 a 乘以 b 的逆元（不一定存在）。

取模运算注意代码细节。

$a, b \in [0, P)$

- $a + b \in [0, 2P - 1)$
- $a - b$ 写成 $a + P - b$
- $a \times b$ 注意是否转 `long long`
- 若 P 为质数，a 的逆元为 a^{P-2}（费马小定理，快速幂）
- 中间结果是否爆 `int` `long long`
- 最后结果是否取模

```cpp
constexpr int P = 998244353;

int norm(int x) {
    return x >= P ? (x - P) : x;
}
void inc(int &x, int y) {
    x += y;
    if (x >= P) x -= P;
}
void dec(int &x, int y) {
    x -= y;
    if (x < 0) x += P;
}
int power(int a, int b) {
    int r = 1;
    while (b) {
        if (b & 1) r = 1ll * r * a % P;
        a = 1ll * a * a % P;
        b >>= 1;
    }
    return r;
}
```

状压 DP

表示状态的技巧，常见的是把麻烦的状态压缩为 k 进制数字。

往往是二进制的状态，可以运用位运算技巧。

数据范围往往很小，切入点明显。

基础位运算操作你熟悉吗?

以下从低到高，从 0 开始编号。

- 取 s 的第 i 位：`(s >> i) & 1`
- s 的第 i 位变为 1：`s | (1 << i)`
- s 的第 i 位变为 0：`s & (~(1 << i))`
- s 的第 i 位取反：`s ^ (1 << i)`

一定要注意**位运算优先级**，不建议死记硬背，不清楚就多加括号。

枚举 S 的子集：

```
for (int i = S; i; i = (i - 1) & S) {
    ...
}
```

复杂度：

若 $|S| = n$，
S 的子集个数是 2^n；
S 的子集的子集个数是 3^n；

……

经典题：TSP 问题

n 个点的有向图，每个边有边权，求一条路径，使得这条路径经过所有点且边权和最小。

$1 \leq n \leq 16$。

类似题 Luogu P1433 吃奶酪

`f[s][i]` 表示集合为 s 的点已经访问过，当前在 i 号点，路径最小边权和。

```
for (int s = 1; s < (1 << n); ++s) {
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        if (((s >> i) & 1) == 0) continue;
        f[s][i] = Inf;
        int t = s ^ (1 << i);
        if (t == 0) {
            f[s][i] = 0;
        } else {
            for (int j = 0; j < n; ++j) {
                if (((t >> j) & 1) == 0) continue;
                f[s][i] = min(f[s][i], f[t][j] + val[j][i]);
            }
        }
    }
}
```

Luogu P1896 [SCOI2005] 互不侵犯

link

在 $N \times N$ 的棋盘里面放 K 个国王，使他们互不攻击，共有多少种摆放方案。国王能攻击到它上下左右，以及左上左下右上右下八个方向上附近的各一个格子，共 8 个格子。

$1 \leq N \leq 9$，$0 \leq K \leq N \times N$。

ABC359D. Avoid K Palindrome

link

给你一个包含字符 `A`、`B` 和 `?` 的长度为 n 的字符串 s。

你可以把 `?` 替换成 `A` 或 `B`，但是要保证 s 中不能出现长度为 k 的回文字符串。

求一共有几种可能的填涂方法，答案对 998244353 取模。

$2 \leq n \leq 1000$，$2 \leq k \leq 10$

ARC058E. Iroha and Haiku

link

若 $a=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$ 存在 $1\le x<y<z<w\le n+1$ 满足 $\sum\limits_{i=x}^{y-1}a_i=X,\sum\limits_{i=y}^{z-1}a_i=Y,\sum\limits_{i=z}^{w-1}a_i=Z$ 时，则称数列 a 是**好的**。

求在所有长度为 n 且 $a_i\in[1,10]$ 的 10^n 个序列 a 中，有多少个序列是**好的**，答案对 10^9+7 取模。

$3\le n\le 40$，$1\le X\le 5$，$1\le Y\le 7$，$1\le Z\le 5$。

CF165E. Compatible Numbers

link

给出一个序列 a，对于每个 a_i，找到 a_j 使得 $a_i \operatorname{and} a_j = 0$（位运算）。如果找不到这样的数，输出 -1。

高维前缀和

```
for (int s = 1; s < (1 << m); ++s) {
    for (int i = 0; i < m; ++i) {
        if (((s >> i) & 1) && f[s ^ (1 << i)] != -1) {
            f[s] = f[s ^ (1 << i)];
        }
    }
}
```

教练让讲的计数 DP 太宽泛了，都是和各类 DP 结合的。

我就比较相关的都稍微讲点。

组合计数原理

加法原理

完成一个工程可以有 n 类办法，$a_i(1 \leq i \leq n)$ 代表第 i 类方法的数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 种不同的方法。

乘法原理

完成一个工程需要分 n 个步骤，$a_i(1 \leq i \leq n)$ 代表第 i 个步骤的不同方法数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ 种不同的方法。

组合数

$\binom{n}{m}$ 或者 C_n^m 表示 n 个物品里选 m 个的方案数。

计算式：

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

递推式（想组合意义）：

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

组合数的预处理

线性预处理

```
int fac[N], ifac[N];
void init(int n) {
    fac[0] = ifac[0] = 1;
    for (int i = 1; i < n; ++i) fac[i] = 1ll * fac[i - 1] * i % P;
    ifac[n - 1] = power(fac[n - 1], P - 2);
    for (int i = n - 1; i > 1; --i) ifac[i - 1] = 1ll * ifac[i] * i % P;
}
int binom(int x, int y) {
    return 1ll * fac[x] * ifac[y] % P * ifac[x - y] % P;
}
```

或者 $\mathcal{O}(n^2)$ 递推。

搬一下 OI wiki 上的例题

给定一个正整数 n，求有多少个把 n 划分成 k 个正整数的和的方案，位置调换视为不同的划分方案。

数位 DP

Luogu P4317 花神的数论题

设 $\mathrm{popcount}(x)$ 表示 x 二进制表示下 1 的个数。

给定 N，求 $\prod_{i=1}^{N} \mathrm{popcount}(i)$，对 10^7+7 取模。

$1 \le N \le 10^{15}$。

*概率 DP

Luogu P5249 [LnOI2019] 加特林轮盘赌

DP 优化

首要考虑状态设计和转移的优化。

不计手段（猜测、打表、数学推导）找规律，找特殊性质（数据范围），然后结合其他板块的知识。

数据结构优化 DP

线段树/树状数组优化 DP

学会包装缝合。

识别转移时是否需要动态维护区间特征值。

CF474E. Pillars

link

给定序列 a，长度为 n。给定 d，找出一个 a 序列的子序列 b（设其长度为 m），使得对于任意的 $1 \leq i < m$，有 $\left|b_{i+1} - b_i\right| \geq d$。

找到最大的 m 和对应序列 b。

$1 \leq n \leq 10^5$，$0 \leq d \leq 10^9$，$1 \leq a_i \leq 10^{15}$。b 输出任意一种。

CF833B. The Bakery

将一个长度为 n 的序列分为 k 段，使得总价值最大。

一段区间的价值表示为区间内不同数字的个数。

$n \leq 35000, k \leq 50$

单调栈优化 DP

LIS

Luogu P1169 [ZJOI2007] 棋盘制作

link

给 $n \times m$ 的 01 矩阵，求面积最大的正方形和面积最大的矩形，使得正方形/矩形内任意相邻两格不同色。

$n, m \leq 2000$。

固定矩形下面那条边，每个点有向上延伸的最大高度，然后单调栈。

注意一下相邻颜色相同的断点。复杂度 $\mathcal{O}(nm)$。

code

单调队列优化 DP

滑动窗口

单调队列优化多重背包

你有 n 种物品，每种物品重量为 w_i ，价值为 v_i ，数量为 K_i 。你有一个承重上限为 W 的背包，现在要求你在不超过重量上限的情况下选取价值和尽可能大的物品放入背包。求最大价值。

设 $f_{i,j}$ 表示前 i 种物品占用了 j 的重量时最大价值，转移为

$$f_{i,j} = \max_{k=0}^{K_i} \{ f_{i-1,j-k\cdot w_i} + k \cdot v_i \}$$

对于第 i 轮的 j 个状态，w_i, K_i 是相同的。

尝试将 $f_{i-1,j}$ 的下标 j 按 $\bmod w_i$ 分组，每一组就是滑动窗口模型。

*斜率优化

Luogu P3648 [APIO2014]序列分割

*P3195 [HNOI2008] 玩具装箱